2019年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

概率论与数理统计（经管类）

一、单项选择题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1.设 $P(B)=0.6, P(A|\overline{B})=0.5$，则 $P(A-B)=$（　）。

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

【答案】B

【知识点】第一章，条件概率

【解析】

$$P(B)=0.6 \Rightarrow P(\overline{B})=0.4$$

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=0.5$$

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A|\overline{B})P(\overline{B})=0.4\times 0.5=0.2$$

2.设事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=0.6$，$P(A\cup B)=0.8$，则 $P(B)=$（　）。

A. 0.2　　B. 0.4　　C. 0.5　　D. 0.6

【答案】C

【知识点】第一章，事件的独立性

【解析】

$$P(A)=0.6 \Rightarrow P(\overline{A})=0.4$$

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=0.8$$

$$P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.8=0.2 \Rightarrow 0.4\times P(\overline{B})=0.2$$

$$P(\overline{B})=0.5 \Rightarrow P(B)=1-0.5=0.5$$

3.甲袋中有 3 个红球 1 个白球，乙袋中有个 1 红球 2 个白球，从两袋中分别取出一个球,则两个球颜色相同的概率是（　）。

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{5}{12}$

【答案】D

【知识点】第一章，概率

【解析】

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

4.设随机变量 X 的分布律为 $\begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & c & \frac{1}{4} & 2c \end{array}$，则 $P\{X>0\}=$（　）。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

【答案】C

【知识点】第二章，离散型随机变量及其分布律

【解析】

由已知 $c+\frac{1}{4}+2c=1\Rightarrow c=\frac{1}{4}$

$P\{X>0\}=\frac{1}{4}+2c=\frac{3}{4}$

5.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}cx, 0\le x\le 2\\ 0, 其他\end{cases}$，则 $P\{X\le 1\}=$（　）。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

【答案】A

【知识点】第二章，连续型随机变量及其概率密度

【解析】

由已知，$\int_0^2 cxdx=1$，$\frac{1}{2}cx^2|_0^2=1\Rightarrow 2c=1\Rightarrow c=\frac{1}{2}$，

$P\{X\le 1\}=\int_0^1 cxdx=\int_0^1\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{4}$

6.已知随机变量 $X\sim N(-2,2)$，则下列随机变量中，服从 $N(0,1)$ 分布的是（　）。

A. $\frac{1}{2}(X-2)$

B. $\frac{1}{2}(X+2)$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}(X-2)$

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}(X+2)$

【答案】D

【知识点】第二章，正态分布

【解析】由已知 $\mu=-2$，$\sigma=\sqrt{2}$，因此 $\frac{1}{\sqrt{2}}(X+2)\sim N(0,1)$。

7.设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为 $\begin{array}{c|cc} X/Y & 1 & 2 \\ \hline -1 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \end{array}$，则 $P\{X+Y=1\}=$（　）。

A. 0.1

B. 0.4

C. 0.5
D. 0.7
【答案】C
【知识点】第二章，离散型随机变量及其分布律

【解析】由分布律得 $P\{X+Y=1\}=0.4+0.1=0.5$

8.设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $D(X)=4$，$D(Y)=2$，则 $D(3X-2Y)=$（　）。

A. 8
B. 16
C. 28
D. 44
【答案】D
【知识点】第四章，方差的性质

【解析】
$$\begin{aligned}D(3X-2Y)&=D(3X)+D(2Y)\\&=9D(X)+4D(Y)\\&=9\times4+4\times2=44\end{aligned}$$

9.设 x_1,x_2,x_3 是来自总体 X 的样本，若 $E(X)=\mu$（未知），$\hat{\mu}=\frac{1}{2}x_1-ax_2+3ax_3$ 是 μ 的无偏估计，则常数 $a=$（　）。

A. $\frac{1}{6}$　B. $\frac{1}{4}$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{1}{2}$
【答案】B
【知识点】第七章，参数估计
【解析】

$$E(\hat{\mu})=E(\frac{1}{2}x_1-ax_2+3ax_3)$$

$$=\frac{1}{2}E(X)-aE(X)+3aE(X)$$

$$=(\frac{1}{2}+2a)E(X)=\mu$$

$$\frac{1}{2}+2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

10.设 $x_1,x_2,\ldots,x_n(n>1)$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其中 μ,σ^2 均未知，$\bar{x}$ 和 s^2 分别是样本均值和样本方差，对于检验假设 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则显著性水平为 α 的检验拒绝域为（　）。

A. $\left\{\left|\bar{x}-\mu_0\right|>\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$

B. $\left\{\left|\bar{x}-\mu_0\right|>\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$

C. $\left\{\left|\bar{x}-\mu_0\right|\le\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$

D. $\left\{\left|\bar{x}-\mu_0\right|\le\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$

【答案】A
【知识点】第八章，假设检验
【解析】方差未知，单个正态总体的均值检验。查看课本总体均值的假设检验的t检验。

第二部分 非选择题

二、填空题：本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分。

11.设A,B,C是随机事件，则“A,B,C至少有一个发生”可以表示为（ ）。

【答案】见解析
【知识点】第一章，随机事件与概率

【解析】$\Omega-\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

12.设$P(A)=0.3,P(B)=0.6,P(A|B)=0.4$，则$P(B|A)=$（ ）。

【答案】0.8
【知识点】第一章，随机事件与概率
【解析】

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0.4\Rightarrow P(AB)=0.24$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.24}{0.3}=0.8$$

13.袋中有个3黄球和2个白球，今有2人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，
则第2个人取得黄球的概率为（ ）。

【答案】$\frac{3}{5}$
【知识点】第一章，随机事件与概率
【解析】

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6+6}{20}=\frac{3}{5}$$

14.已知随机变量X服从参数为λ的泊松分布，且$P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则$\lambda=$（ ）。

【答案】$\lambda=2$
【知识点】第二章，随机变量及其概率分布
【解析】

由题意 $P\{X=1\}=P\{X=2\}\Rightarrow \frac{\lambda^1}{1}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}\Rightarrow \lambda=2$

15.设随机变量 X 服从参数为1的指数分布，则 $P\{X\geq 1\}=$（　）。

【答案】e^{-1}

【知识点】第二章，随机变量及其概率分布

【解析】

由题意，随机变量 X 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

$$P\{X\geq 1\}=1-F(1)=1-(1-e^{-1})=e^{-1}$$

16.设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

X/Y	1	2
0	0.1	0.2
1	0.4	0.3

，则 $P\{X=Y\}=$（　）。

【答案】0.4

【知识点】第三章，多维随机变量及其概率分布

【解析】由分布律表知 $P\{X=Y\}=0.4$

17.设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}c, & 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则常数 $c=$（　）。

【答案】$c=\frac{1}{2}$

【知识点】第三章，多维随机变量及其概率分布

【解析】

由题意得：$\int_0^2\int_0^1 f(x,y)dxdy=1\Rightarrow 2c=1\Rightarrow c=\frac{1}{2}$

18.设随机变量 X 服从区间 $[1,3]$ 上的均匀分布，Y 服从参数为2的指数分布，X,Y 相互独立，$f(x,y)$ 是 (X,Y) 的概率密度，则 $f(2,1)=$（　）。

【答案】e^{-4}

【知识点】第三章，多维随机变量及其概率分布

【解析】

由已知条件得 X,Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1\le x\le 3\\ 0, & 其他\end{cases}，\quad f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y\ge 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

因为 X 与 Y 相互独立，所以 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-2y}, & 1\le x\le 3，y\ge 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f(2,1)=e^{-4}$$

19.设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim B(12,0.5)$，Y 服从参数为 2 的泊松分布，则 $E(XY)=$（　）。

【答案】12

【知识点】第四章，随机变量的数字特征

【解析】

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$
$$=np\lambda=12\times 0.5\times 2=12$$

20.设 $X\sim B(100,0.2)$，$Y=\dfrac{X-20}{4}$ 由中心极限定理知 Y 近似服从的分布是（　）。

【答案】$N(0,1)$

【知识点】第五章，大数定律及中心极限定理

【解析】

$$E(X)=np=100\times 0.2=20$$

$$D(X)=npq=16$$

由中心极限定理 $Y=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}=\dfrac{X-20}{4}\sim N(0,1)$

21.已知总体 X 的方差 $D(X)=6$，x_1,x_2,x_3 为来自总体 X 的样本，$\bar{x}$ 是样本均值，则 $D(\bar{x})=$（　）。

【答案】2

【知识点】第四章，随机变量的数字特征，方差的性质。

【解析】

$$D(\bar{x})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}x_i)$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(x_i)=\frac{1}{n^2}\times n\times 6=\frac{6}{n}$$

$n = 3 \Rightarrow D(\bar{x}) = 2$

22.设总体 X 服从参数是 λ 的指数分布，$x_1, x_2, ..., x_n$ 为来自 X 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则 $E(\bar{x}) =$（　）。

【答案】$\frac{1}{\lambda}$

【知识点】第四章，随机变量的数字特征，方差的性质。

【解析】

$X \sim E(\lambda) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$E(\bar{x}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} x_i)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n} n \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

23.设 $x_1, x_2, ..., x_{16}$ 为来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，则 ${x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_{16}}^2$ 服从的分布是（　）。

【答案】$\chi^2 \sim \chi^2(n)$

【知识点】第六章，统计量及其抽样分布，正态总体的抽样分布。

【解析】由卡方分布的定义得 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$。

24.设 $x_1, x_2, ..., x_n$ 为来自正态总体 X 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，若 X 服从 $[0, 4\theta]$ 上的均匀分布，$\theta > 0$，则未知参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta} =$（　）。

【答案】$\frac{1}{2}\bar{x}$

【知识点】第七章，参数估计，点估计。

【解析】易知总体 X 的均值为

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{4\theta} x \frac{1}{4\theta} dx = 2\theta$，由矩法，应有 $2\theta = \bar{x}$，由此解得 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = \frac{1}{2}\bar{x}$。

25.设 $x_1, x_2, ..., x_{25}$ 为来自正态总体 $N(\mu, 5^2)$ 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，欲检验假设 $H_0: \mu = 0, H_1: \mu \neq 0$，则应采用的检验统计量的表达式为（　）。

【答案】$u = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma}\sqrt{n}$

【知识点】第七章，参数的区间估计
【解析】参考教材，单个正态总体参数的置信区间

$$u=\frac{(\bar{x}-\mu)}{\sigma}\sqrt{n}$$

三、计算题：本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分。

26.两台车床加工同一种零件，第一台出现次品的概率是0.03，第二台出现次品的概率是0.06，加工出来的零件混放在一起，第一台加工的零件数是第二台加工的零件数的两倍。

求：（1）从中任取一个零件是次品的概率；

【答案】0.04
【知识点】第一章，随机事件与概率
【解析】设“任取一个零件是次品”为事件A。

$$P(A)=\frac{2}{3}\times 0.03+\frac{1}{3}\times 0.06=\frac{0.06+0.06}{3}=0.04$$

（2）若取得的零件是次品，它是由第一台加工的概率。

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】设“若取得的零件是次品，它是由第一台加工的”为事件B。

$$P(B)=\frac{\frac{2}{3}\times 0.03}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\times 0.03}{0.04}=\frac{1}{2}$$

27.设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，且$E(X)=\frac{1}{2}$。

求：（1）常数a,b；（2）$D(X)$。

【答案】见解析
【知识点】第四章，随机变量的数字特征
【解析】
由题意得：（1）

$$\int_0^1(ax^2+bx)dx=1,\quad E(X)=\int_0^1 x(ax^2+bx)dx=\frac{1}{2}$$

得$\begin{cases}\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=1\\ \frac{a}{4}+\frac{b}{3}=\frac{1}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}a=-6\\ b=6\end{cases}$

（2）$E(X^2)=\int_0^1 x^2(-6x^2+6x)dx=\frac{3}{10}$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

四、综合题：本大题共2小题，每小题12分，共24分。

28.设二维随机变量(X,Y)的分布律为

X/Y	-2	0	2
0	a	0.1	0.2
2	0.1	0.2	b

$P\{X=2\}=0.6$。

求：（1）常数a,b；（2）(X,Y)关于Y的边缘分布律；（3）$P\{X+Y\le 0\}$。

【答案】见解析
【知识点】第三章，多维随机变量及其概率分布
【解析】

（1）$P\{X=2\}=0.6=0.1+0.2+b\Rightarrow b=0.3$

$P\{X=2\}=0.6\Rightarrow P\{X=1\}=1-0.6=0.4$

$a+0.1+0.2=0.4\Rightarrow a=0.1$

（2）

Y	-2	0	2
$P(Y)$	0.2	0.3	0.5

（3）$P\{X+Y\le 0\}=0.1+0.1+0.1=0.3$

29. 设随机变量$X\sim N(1,9),Y\sim N(0,16)$且$X$与$X$的相关系数为$\rho_{XY}=-0.5$，$Z=\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y$。

求：（1）常数$Cov(X,Y)$；（2）$E(Z),D(Z)$；（3）$Cov(X,Z)$。

【答案】见解析
【知识点】第四章，协方差与相关系数
【解析】

（1）$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=-0.5\times 3\times 4=-6$

（2）$E(Z)=E(\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$

$D(Z)=D(\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y)=D(\frac{1}{3}X)+D(\frac{1}{2}Y)-2Cov(\frac{1}{3}X,\frac{1}{2}Y)$

$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)-\frac{1}{3}Cov(X,Y)$

$=1+4+2=7$

（3）$Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y)$

$= Cov(X, \frac{1}{3}X) + Cov(X, \frac{1}{2}Y)$

$= \frac{1}{3}Cov(X, X) + \frac{1}{2}Cov(X, Y)$

$= \frac{1}{3}D(X) + \frac{1}{2}Cov(X, Y)$

$= 3 - 3 = 0$

五、应用题：10 分。

30.设某厂生产的一种金属丝，其折断力 X（单位：kg） 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，以往的平均折断力 $\mu = 570$，今更换原材料生产一批金属丝，并从中抽出 9 个样品检测折断力，算得样本均值 $\overline{x} = 576.6$，样本标准差 $s = 7.2$。试问更换原材料后，金属丝的平均折断力是否有显著变化？（附：$\alpha = 0.05, u_{0.025} = 1.96, t_{0.025}(8) = 2.306$）

【答案】见解析

【知识点】第八章，假设检验

【解析】

检验假设：

$$H_0 : \mu_1 = 570, H_1 : \mu_1 \neq 570$$

由于 $\overline{x} = 576.6$，$s^2 = 7.2^2 = 51.84$

$$t = \frac{576.6 - 570}{\sqrt{51.84 / 9}} = \frac{6.6}{2.4} = 2.75$$

由 $\alpha = 0.05$，查表，得临界值 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$，由于 $|t| = 2.75 > 2.306$，故拒绝 H_0，即金属丝的平均折断力有显著变化。